

Musikalische Anwendungen stochastischer und rekursiver Verfahren

Orm Finnendahl

13. Juni 2004

1 Vorrede

Dieser Text richtet sich nicht an ein Fachpublikum. Aus diesem Grunde halte ich es für sinnvoll, die Themen, die hier angesprochen werden, in einen allgemeinen historischen Kontext einzubetten. Um dem Leser aber nicht den Spaß an der Materie durch umständliche und zähe Vorreden zu verderben, wage ich stattdessen zunächst den direkten Sprung in die Erklärung konkreter musikalischer Anwendungen mathematischer Verfahren. Die allgemeinen Bemerkungen und einige Hintergründe habe ich an den Schluß des Textes gestellt. Auch bei ihnen habe ich mich um Allgemeinverständlichkeit bemüht. Sollte mir dies nicht an allen Stellen gelungen sein, bitte ich um Nachsicht.

Doch jetzt: Vorhang auf für die

2 Markov Ketten

Der russische Mathematiker Andrej Markov (1856-1922) beschäftigte sich mit Untersuchungen zur Häufigkeit von Ereignissen in Ereignisfolgen. Welcher Art diese Ereignisse sind, also ob es sich um Molekülketten in Gensequenzen oder beispielsweise um die Trikotfarbe beim Zieleinlauf eines Fahrradrennens handelt, spielt dabei für die Theorie keine Rolle. Bezeichnen wir die Ereignisse mit den Symbolen A, B, C, \dots und betrachten wir als Beispiel die Symbolfolge

$ABACDBAA$

Wir stellen fest, daß das Ereignis A doppelt so häufig auftritt, wie das Ereignis B und A vier mal so häufig erscheint, wie C oder D . Mit anderen Worten ist das Auftreten von Ereignis A vier mal so wahrscheinlich, nwie das Auftreten von Ereignis C bzw. D .

An einem musikalischen Beispiel kann das recht anschaulich demonstriert werden: Ereignisfolgen in der Musik können beispielsweise Melodien sein, die bezüglich der Abfolge ihrer Tonhöhen untersucht werden. Als Ereignisfolge dient



Abbildung 1: Weill: “Denn wie man sich bettet, so liegt man”, Kodierung der Melodie

in diesem Fall der Anfang der Melodie von “Denn wie man sich bettet, so liegt man” aus der Oper *Aufstieg und Fall der Stadt Mahagonny* von Bertold Brecht und Kurt Weill (Abb. 1). Die in Symbole chiffrierten Ereignisse sind dabei nicht die Tonhöhen selbst, sondern die Intervalle zwischen benachbarten Tönen, gemessen in Halbtonschritten (eine Quinte wird also durch eine '7' und nicht durch eine '5' dargestellt). Diese ergeben in der ersten Zeile des Beispiels die Symbolfolge

-1 1 4 3 -2 -4 3 -2 -8 1 2 0 1 11 -2 -7

Auch bei dieser Sequenz erscheinen einige Intervalle häufiger und andere, wie beispielsweise die Quarte aufwärts (5), erscheinen gar nicht.

Das Besondere an Markovketten ist jedoch nicht die Untersuchung der Häufigkeit von Einzelereignissen, sondern die Untersuchung der Häufigkeit ihrer Abfolge: Zerlege ich die Intervallfolge in die vorkommenden direkt aufeinanderfolgenden Ereignisse, so erhalte ich folgende (überlappende) Ereignispaare:

{-1 1}{1 4}{4 3}{3 -2}{-2 -4}{-4 3}{3 -2}{-2 -8}{-8 1}{1 2}{2 0} usw.

Es ist zu sehen, daß einige Abfolgen, wie beispielsweise {2 1}, gar nicht vorkommen, und die Folge {3 -2} als einzige Folge zweimal in der Sequenz auftritt. Mit Hilfe dieser Untersuchung kann ich ermitteln, wie wahrscheinlich beispielsweise eine große Terz (4) ist, wenn zuvor eine kleine Sekunde (1) auftrat (in diesem Fall $\frac{1}{3}$, da außer der Folge {1 4} in der obigen Beispielsequenz mit je gleicher Häufigkeit {1 2} und {1 11} vorkommen). Ganz analog kann man dieses Verfahren auch auf längere Untersequenzen von 3, 4 oder mehr Intervallen anwenden. Die Länge der untersuchten Teilsequenzen bestimmt dabei die *Ordnung* der Markov Ketten. Die statistische Auswertung der oben beschriebenen Paare aus unserer Beispielsequenz bildet die “Markov Ketten 1. Ordnung”, 3-er Sequenzen hätten Ordnung 2, 4-er Sequenzen Ordnung 3 usw.

Mit Hilfe der Auswertung aus einer oder mehreren vorgegebenen Sequenzen lassen sich neue, beliebig lange Sequenzen erzeugen, die, bezogen auf die gewählte Ordnung, die gleiche Häufigkeitsverteilung, wie die Ursprungssequenz



Abbildung 2: Computergenerierte Sequenz basierend auf “Denn wie man sich bettet, so liegt man”

Akkordstruktur	3	5	7	8	7	11
	5	5	5	5		x
	4	4	4	4		3
Intervallfortschr. des Baßtons	3	3	3	3		12
metrisches Gewicht	-5	0	0	0		-7
	3	0	2	0		1
						3

Abbildung 3: Josquin: “Douleur me bat”, Kodierung des Tonsatzes

aufweisen. Angewandt auf die gesamte Länge des Musikbeispiels ist bei Ordnung 1, unter Berücksichtigung der Dauernwerte mit einem Rechner die in Abb. 2 dargestellte Tonfolge errechnet worden: Da die Häufigkeit der Paare aus der Beispielsequenz zu Grunde gelegt wurde, gibt es in der neu errechneten Sequenz keine Intervallfolge, die nicht auch in der ursprünglichen Sequenz vorkommt.

Es ist natürlich prinzipiell möglich, jede Art von Melodieverläufen, ob tonal oder atonal, mit dieser Methode zu erfassen und in Hinblick auf ihre durch die Markovketten repräsentierten Charakteristika zu studieren. Auch kann dieses Verfahren auf ganz andere Eigenschaften eines musikalischen Satzes, beispielsweise klanglicher oder rhythmischer Art, oder deren Korrelationen, angewandt werden. Ich möchte noch ein anderes Beispiel aus traditioneller, tonaler Musik zeigen, um die Leistungsfähigkeit dieser Methodik zu demonstrieren. Als Vorlage diene je ein mehrstimmiges Werk aus der Renaissance und aus dem Frühbarock, das Madrigal “Douleur me bat” des Komponisten Josquin Desprez aus dem 15. Jahrhundert und das Madrigal “S’io non miro, non moro” des Komponisten Don Carlo Gesualdo de Venosa, kurz Gesualdo genannt, aus dem 16. Jahrhundert. Bei beiden Werken handelt es sich um fünfstimmige Werke, das heißt, jedes Werk setzt sich aus fünf einstimmigen Melodieverläufen mit Pausen zusammen. Der Übersichtlichkeit halber sind bei den Abbildungen die ursprünglich auf fünf getrennten Notensystemen notierten Stimmen in das tradi-

tionelle Klaviersystem mit Violin- und Baßschlüssel transkribiert worden. Abb. 3 zeigt einen Ausschnitt aus dem Madrigal von Josquin.

Die für die Markovketten erforderlichen Symbolfolgen werden folgendermaßen erzeugt: Der gesamte Zeitablauf wird in Abschnitte zerlegt, deren Grenzen dadurch bestimmt werden, daß sich in einer oder mehr Stimmen etwas ändert (sei es, daß die Stimme sich bewegt oder pausiert). Jeder der Abschnitte entspricht einem Symbol in den Markov Ketten.

In dem Symbol werden Intervallstruktur des Zusammenklanges aller Stimmen (in Halbtonschritten), Intervallfortschreitung des Basstons und metrisches Gewicht (in einer Skala von 3 für die stärkste Betonung am Taktanfang bis zur 0 für die geringste Betonung) jedes Ereignisses kodiert, so daß in dieser Hinsicht gleiche Ereignisse mit dem gleichen Symbol versehen werden. In unserem Beispiel sind keine zwei Symbole gleich, obwohl der 5. und der 7. analysierte Akkord die gleiche Intervallstruktur aufweisen, da sie unterschiedlich metrisch gewichtet sind. Für die in Abb. 4 gezeigte Komposition wurde auf der Basis von Markovketten 1. Ordnung ein Satz generiert, bei dem die Wahrscheinlichkeiten des Josquin Beispiels allmählich in die Wahrscheinlichkeiten des Gesualdo Beispiels transformiert wurden, so daß der Satz im Josquin Stil beginnt und im Gesualdo Stil endet. Übrigens wurde zusätzlich zu Intervallstruktur und metrischem Gewicht auch noch die Dauer der Akkorde gespeichert. Sie blieb aber bei der Errechnung der Akkordfortschreitungen unberücksichtigt und wurde erst nachträglich wieder den Akkorden zugeordnet.

So überzeugend der Satz in akustischer Hinsicht auch klingt, sollte auch an dieser Stelle nicht vergessen werden, daß die Erzeugung einer Partitur mit Hilfe dieses mechanischen Modells nicht einfach mit kompositorischer Arbeit gleichgesetzt werden kann. Kompositionen der Renaissance Zeit sind noch durch sehr viele andere strukturelle Eigenschaften determiniert, die durch Markov Ketten nicht darstellbar sind. Und darüber hinaus hat der imitierende Nachvollzug einer bereits existierenden Musik nichts mit dem kreativen Prozess kompositorischer Arbeit zu tun, deren Ziel nicht die Wiederholung vorgegebener Modelle, sondern vielmehr die Ermöglichung einer veränderten und damit neuen Wahrnehmung ist. Lediglich die akustische Oberfläche der Vorlage kann auf diese Weise überzeugend imitiert werden. Ein genaues Studium der Eigenschaften des Originalsatzes hinsichtlich der in den Markovketten kodierten Information ist jedoch ein sehr hilfreiches Mittel, um das Modell besser verstehen zu lernen. Und in diesem Sinne ist das Verfahren meines Erachtens auch in einem kreativen Prozess sinnvoll einsetzbar.

Bei meiner Komposition "Wheel of Fortune" für MIDI Flügel und Live-Elektronik wurde ein Prozess mit Markov Ketten eingesetzt, um eine labyrinthische Verstrickung des Pianisten zu erzielen: Er verknüpft einzelne, frei arpeggierte Akkorde gemäß vorgegebener Regeln, die nach jedem Akkord jeweils 3 verschiedene Fortschreitungen ermöglichen. Die dabei entstehenden Akkordfolgen sind sehr redundant, d.h., daß einer der neu gespielten Akkorde mit hoher Wahrscheinlichkeit vorher schon einmal vorgekommen ist. Das Spiel des Pianisten wird dabei von einem Computer, der an die Tastatur des Flügels angeschlossen ist, aufgezeichnet. Wird vom Pianisten ein Akkord gespielt, der

60" für Gösta

oder: Wie moduliert Pierre Menard im Schubertjahr von Josquin nach Gesualdo?

Orm Finnendahl (1997)

The image displays a musical score for the piece "60" für Gösta" by Orm Finnendahl (1997). The score is arranged in two systems, each containing five vocal staves (Soprano, Alto, Tenor 1, Tenor 2, Bass) and a piano accompaniment. The first system covers measures 1 through 23, and the second system covers measures 24 through 48. The vocal parts feature various rhythmic patterns and melodic lines, with some measures marked with time signatures such as 4/4, 3/4, and 2/4. The piano accompaniment provides a harmonic and rhythmic foundation for the vocal lines. The score is written in a standard musical notation style, including clefs, time signatures, and various musical symbols.

Abbildung 4: "60" für Gösta"

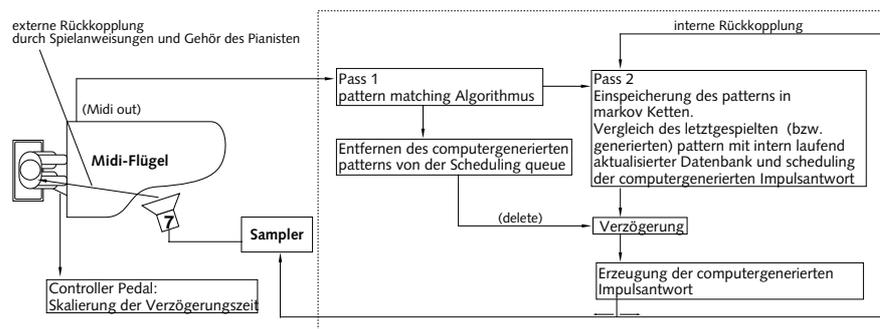


Abbildung 5: “Wheel of Fortune”, Schaltung des Schlußteils

vorher schon einmal vorgekommen ist, so generiert der Computer auf der Basis von Markov Ketten 1. Ordnung eine Fortsetzung, die über Lautsprecher wiedergegeben wird. Darauf muß der Pianist unter Beachtung der Regeln reagieren, wobei er möglicherweise erneut mit einem Akkord antwortet, der schon einmal gespielt wurde. Im Wechselspiel zwischen Computer und Pianisten entsteht so ein Dialog, in dem der Computer den Pianisten mit den von ihm selbst zuvor gespielten Fortführungen konfrontiert, so daß sich der Pianist allmählich in einem von ihm erzeugten und verursachten Labyrinth möglicher Fortschreitungen verstrickt, in dem er sich kaum noch zurecht findet und sich fast zwangsläufig und unvorhersehbar “verläuft”. Abb. 5 zeigt die technische Schaltung dieses Teils der Komposition (der Markovsche Käfig).

Eine interessante Modifikation der Markov Ketten läßt sich dadurch erzielen, daß man die generierten Elemente wieder in das System zurückspeist, d.h. die auf der Basis der vorliegenden Wahrscheinlichkeiten einer vorgegebenen Testmenge erwürfelten Symbole werden an das Ende der Testfolge angehängt und verändern dadurch die Häufigkeit und damit die Wahrscheinlichkeiten der Symbolfolgen. Fixiert man die Größe der Testfolge und löscht man für jedes neu generierte Symbol das jeweils älteste aus der Auswertungsfolge, so läßt sich ein Evolutionsspiel initiieren, bei dem bei geschickter Wahl der Anzahl zugelassener unterschiedlicher Symbole und der Größe (Anzahl der Elemente) der Auswertungsfolge, sich allmählich einzelne Symbolfolgen “durchsetzen” und andere Folgen vollständig aus der Menge verschwinden (eliminiert werden).

3 Rekursive Verfahren

Das Verfahren der Sequenzgenerierung auf der Basis der Übergangswahrscheinlichkeiten ihrer Elemente läßt sich natürlich auch auf andere, nicht tonale Harmoniefolgen anwenden. Abb. 6 zeigt eine Folge 6-stimmiger Akkorde aus meiner Komposition *Fallstudien* für Kammerensemble, die mit Hilfe von Markov Ketten erstellt wurde. Die Akkorde klingen aufgrund ihrer Intervallstruktur ähnlich



Abbildung 6: “Fallstudien”, Akkordreihenfolge



Abbildung 7: Schlußteil“Fallstudien”, Reihenfolge der Akkordtöne

und haben die Eigenschaft, sich allmählich und unaufhörlich nach unten zu bewegen. Die Akkordtöne werden dabei nicht gleichzeitig, sondern nacheinander gespielt. Für die Errechnung der Reihenfolge der Akkordtöne habe ich ein rekursives Verfahren verwendet. Die Akkordtöne werden mit Indizes (1-6) versehen. Die Anfangssequenz lautet 1 2 3 4 5 6. Jede nachfolgende Sequenz wird erzeugt, indem die Abfolge der letzten sechs Ziffern aus der vorhergehenden Sequenz übernommen wird und zusätzlich die ersten drei Ziffern dieser Sequenz alternierend in die letzten drei Ziffern eingeschoben werden (Abb. 7). Dadurch entsteht eine Abfolge von Indizes, die die vorherige Sequenz aufgreift, variiert und allmählich transformiert, bis nach 5 Durchläufen die ursprüngliche Sequenz wieder erreicht wird. Werden diese Indizes nun auf die Akkordfolge projiziert, entsteht eine Tonfolge, die immer wieder ähnlich, jedoch nie gleich klingt und so einen suggestiven, langsamen Sog nach unten erzeugt.

Die Rhythmisierung und Instrumentierung ist mit einem vergleichbaren Verfahren erzeugt. Abb. 8 zeigt einen Ausschnitt aus diesem Teil der Partitur von Fallstudien. Das oben beschriebene Verfahren bezieht sich dabei auf sämtliche Instrumente *mit Ausnahme* von Klavier und Schlagzeug.

Rekursive Verfahren kann man aber auch auf eine ganz andere Art und Weise bei der kompositorischen Arbeit einsetzen. Für meine Komposition *Rekurs* für Saxophon, Schlagzeug, Klavier und zwei Aufnahmegeräte bildete eine rekursiv errechnete Grafik den Ausgangspunkt. Das Verfahren ist dabei ganz ähnlich dem Verfahren zur Erzeugung der recht bekannten sogenannten Schneeflockenkurve (Abb. 9): In einer Ausgangsgrafik, einem gleichseitigen Dreieck, wird jede Strecke durch ein Liniensegment, das aus 4 kürzeren Strecken gebildet ist, ersetzt. Das Resultat ist ein sechszackiger Stern, in der Abbildung Generation 1 genannt. Rekursiv wird dieses Verfahren, wenn diese resultierende Grafik die Ausgangsgrafik für einen erneuten Ersetzungsvorgang bildet, der die Form von Generation 2 zur Folge hat. Nach zwei weiteren Rekursionen erhält man eine Grafik, die einer Schneeflocke ähnelt (Generation 4). Man nennt diese Grafik

Musical score for measures 232-243. The score includes parts for Horn (H.), Oboe (Ob.), Clarinet (Kl.), Bongos, Congas, Cymbal (Cymb.), Viola/Celli (Vb./Cl.), Maracas (Mar.), Piano (Pno.), Violin (Vnc.), Viola (Va.), Violoncello (Vc.), and Double Bass (Kb.). The score features various dynamics such as *mp*, *pp*, *p*, and *mf*. A tempo marking of $\text{♩} = 108$ is present above the piano part. The score is written in 4/4 time and includes various musical notations such as slurs, accents, and dynamic markings.

Abbildung 8: Partiturausschnitt des Schlußteils von "Fallstudien"

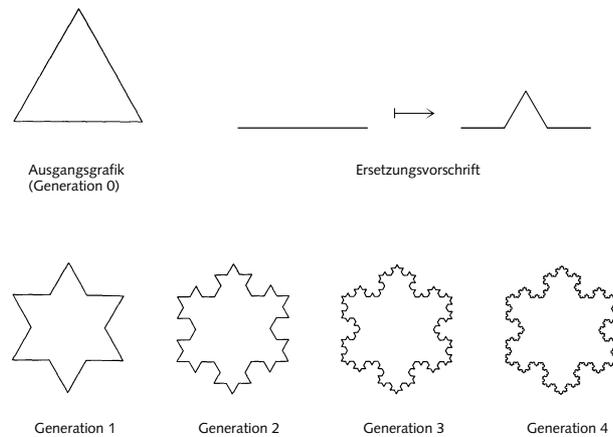
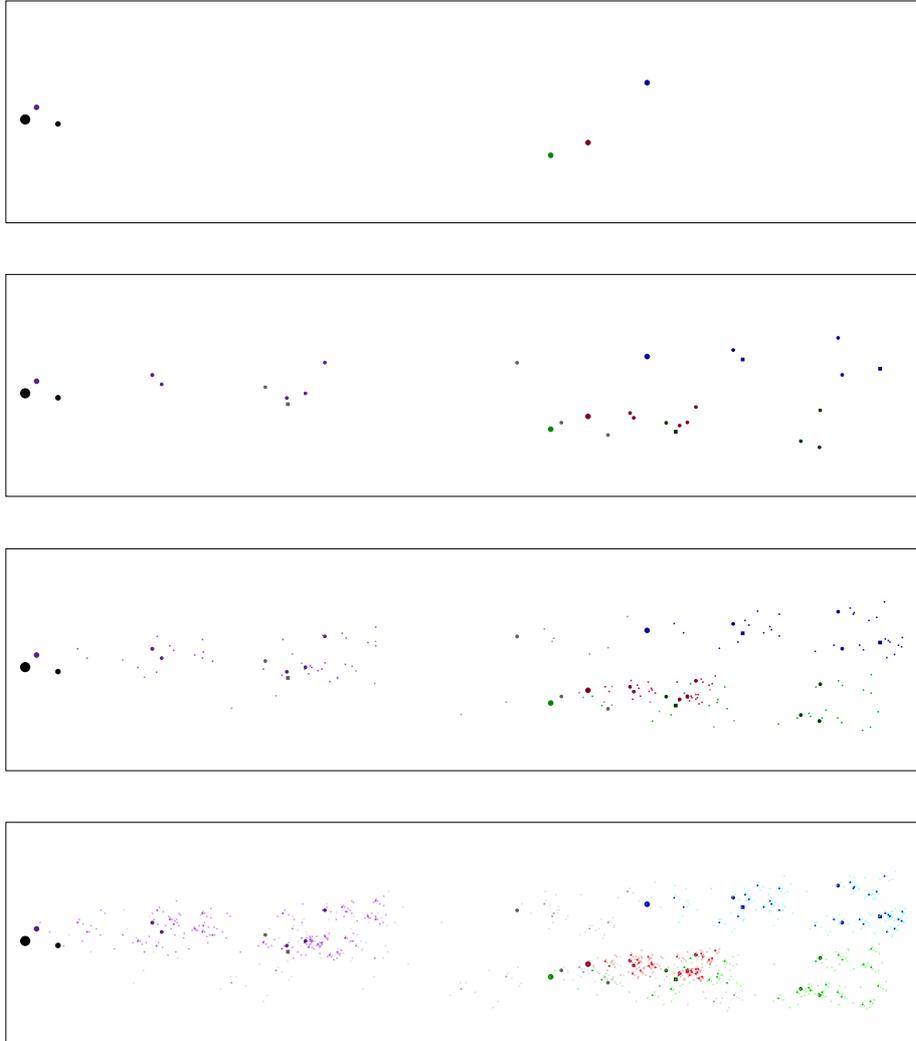


Abbildung 9: Entwicklung der Schneeflockenkurve

fraktal, da sich Ausschnitte der Grafik auf verschiedenen Vergrößerungsstufen ähneln.

In *Rekurs* habe ich mir diese Eigenschaften fraktaler Grafiken zunutze gemacht, um die Form der Komposition zu bestimmen: Ausgangsgrafik ist hierbei ein Punkt. Dieser Punkt wird durch 6 Punkte ersetzt, die eine Pendelbewegung mit sich vergrößerndem Ausschlag vollführen (Abb. 10, oben). Dieses Ersetzungsverfahren wird nun, ganz ähnlich wie bei der Schneeflockenkurve rekursiv auf die 5 neuen Punkte der Ergebnisgrafik angewandt (Abb. 10, 2. Zeile). Dabei ist jedoch wichtig, daß die 5 Ersetzungsgrafiken eine unterschiedliche Grösse haben: So ist die Grafik, die von den Punkten 1 (violett), 3 (grün) und 5 (blau) ausgeht, genau halb so groß, wie das Punktmuster, das von Punkt 2 (grau) ausgeht und genau doppelt so groß, wie das in Punkt 4 (rot) ersetzte Punktmuster. Die Rekursionen werden auch hier noch zwei Mal durchgeführt, bis das Punktmuster in Abb. 10 unten entsteht.

Die fraktalen Eigenschaften des Punktmusters ist an einigen Stellen deutlich zu sehen: Betrachtet man das gesamte Bild der 4. Generation, so sieht man einen Keil, der von rechts nach links spitz zuläuft und der in der Mitte eine starke Ausdünnung der Punkte aufweist. Die rot eingefärbte Punktansammlung bildet im Gesamtbild den Bereich grösster Dichte. Die gleichen Eigenschaften haben die unterschiedlich eingefärbten Teile der Gesamtgrafik. Die violett, blau, grün, rot und grau eingefärbten Muster haben jeweils an proportional gleichen Stellen Bereiche grösster und geringster Dichte. Entsprechend lassen sich die Punktmuster der jeweiligen Farben wiederum in 5 Bereiche einteilen, die, entsprechend verkleinert, an ähnlichen Stellen Verdichtungen und Ausdünnungen aufweisen. Auf diese Weise erhält man eine Gesamtform, in der die Punkte bezüglich ihrer Position eine unterschiedliche Relevanz im lokalen bzw. globalen Kontext haben. Beispielsweise ist der Ausgangspunkt (Ursprung) der roten Punkte bezogen auf



violett	Tonhöhenstrukturierte Rekursionen
schwarz	Vibrations/Gegenschlagsklänge
grün	perkussive Klänge/Schlaggeräusche
rot	Schichtungen resonierender "Rotationsakkorde"
blau	Flageoletklänge/hohes Register

Abbildung 10: Formübersicht "Rekurs"

das rote Punktmuster der erste Punkt, bezogen auf das globale Muster jedoch der 4. Punkt.

Eine Herausforderung stellt nun die musikalische Interpretation dieser Punkte dar. Naheliegenderweise wurde die Horizontale als musikalische Zeit gedeutet. Um das rekursive Verfahren zu verdeutlichen, wählte ich einen Aufbau, bei dem die Musiker zunächst das Punktmuster der 2. Generation interpretieren und ihre musikalischen Aktionen dabei mit Hilfe von Mikrofonen und einem Aufnahmegerät mitschneiden. Anschließend wird das zuvor Aufgenommene über Lautsprecher wiedergegeben und von den Musikern live ergänzt, so daß sich in der Summe das Punktmuster der 3. Generation ergibt. Auch dieses Resultat, also die Summe aus Live Gespieltem und zuvor Aufgenommenen, wird wieder aufgenommen, erneut wiedergegeben und von den Musikern ergänzt, und so das endgültige Punktmuster angenähert. Das rekursive Verfahren wird also bei einer Aufführung nachvollzogen und inszeniert. Die vertikale Auslenkung der Punkte wurde hingegen nicht, wie man vielleicht annehmen könnte, einfach als Tonhöhe interpretiert. Vielmehr symbolisiert jeder Punkt eine musikalische Aktion, die zumeist durch klangliche Eigenschaften charakterisiert ist. Die grauen Punkte stehen beispielsweise für Aktionen, die durch unterschiedliche schnarrende Klänge, die mit den Instrumenten hervorgebracht werden können, gekennzeichnet sind. Violett sind musikalische Ereignisse, die durch eine, später noch zu erläuternde rekursive Intervallik gekennzeichnet sind. Blaue Punkte symbolisieren extrem hohe Klänge, die mit Triangeln, Glockenspiel, dem Saxophon und durch spezielle Klangerreger im Inneren des Klaviers hervorgebracht werden. Grüne Punkte bezeichnen Schlaggeräusche unterschiedlichster Art und rote Punkte eine in sich rotierende "fraktale" Harmonik.

Entsprechungen in der Form haben häufig Entsprechungen im musikalischen Klang zur Folge: Ein rasselndes Geräusch, das in der Mitte des gesamten Stücks durch Gegenstände, die auf den Saiten des Klaviers vibrieren, entsteht, entspricht dem Klang eines mit Fingern angeregten Beckens auf dem eine Metallkette vibriert (in der Mitte der violetten Grafik) und ein mit vibrierender Zunge (ähnlich einem rollenden 'r') hervorgebrachter hoher Saxophonten (in der Mitte der blauen Grafik). In ähnlicher Weise lässt sich die zweite Hälfte der blauen Grafik als eine starke zeitliche Dehnung (Zeitlupe) eines fortissimo Schlages auf 3 gegeneinanderpendelnde Triangeln verstehen, der, bezogen auf die violette Grafik, an entsprechender Position (also an der zweiten Hälfte des oberen Keils der zweiten Hälfte des violetten Punktmusters) angeordnet ist. Eine detaillierte Ausführung des kompositorischen Arbeitsweise erscheint an dieser Stelle, bedingt durch das Medium der Schrift und dem Rahmen dieses Textes nicht sinnvoll. Es sollte aber an dieser Stelle noch auf ein Beispiel für die bereits oben erwähnte rekursive Intervallik folgen, da sich dieser Vorgang auch ohne klangliche Beispiele zumindest erläutern lässt. Ausgangspunkt bildet hierbei ein Dreitonmotiv (fis, d, cis, in Intervallen, ausgehend vom Anfangston, also $\{0, +8, -3\}$). Die Ersetzungsvorschrift bezieht sich auf die letzten beiden Töne: Der vorletzte Ton wird durch ihn selbst, gefolgt von dem um einen Halbton erniedrigten Dreitonmotiv, der letzte Ton durch ihn selbst, gefolgt von einem um einen Halbton erhöhten Dreitonmotiv, ersetzt (Abb. 11 zeigt dies in grafi-

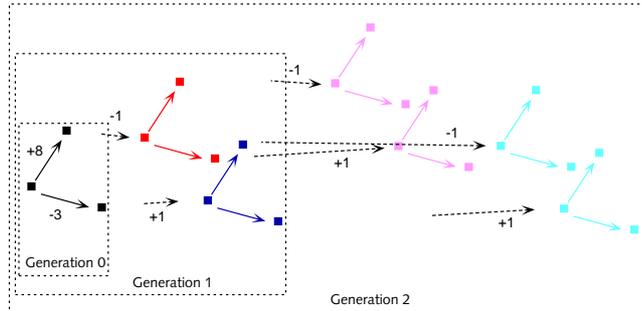


Abbildung 11: Anfang "Rekurs", grafische Ableitung der Tonkonstellationen

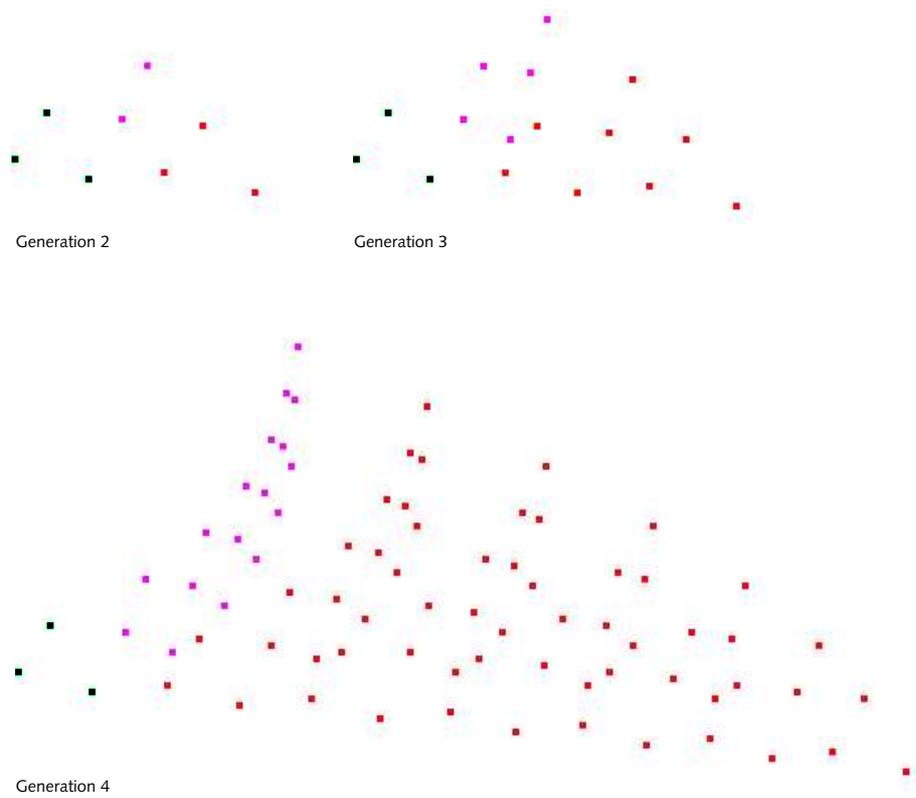


Abbildung 12: "Rekurs", Entwicklung der rekursiven Grafik

The image displays a musical score for a piece titled "Rekurs". The top section shows a single melodic line starting at measure 15, divided into seven measures labeled "Takt 1" through "Takt 7". Below this, four generations of the motif are shown, labeled "Gen. 0", "Generation 1", "Generation 2", and "Generation 4". Each generation is represented by a box containing the notes of that generation, with arrows indicating how the notes of one generation lead to the notes of the next. The bottom section of the score shows three passages through the motif, labeled "1. Durchlauf", "2. Durchlauf", and "3. Durchlauf". Each passage is written on a separate staff, showing how the motif is developed and transformed through successive iterations.

Abbildung 13: "Rekurs", Verknüpfung der Motive und Darstellung des Ablaufs im Stück

scher Notation). Auch hier lassen sich nach einigen Generationen Tontrauben generieren, die hinsichtlich ihrer Intervallik und Motivik sehr distinkt erkennbare Charakteristiken ausbilden, die in allen drei Generationen einen ähnlichen Gesamtverlauf ergeben (Abb. 12). Die obere Hälfte von Abb. 13 zeigt diese Entwicklung in musikalischer Notation. Die Tonkonstellationen wurden in *Rekurs* allerdings so verwandt, daß nicht ihr allmähliches Wachsen gezeigt wird, sondern, ausgehend von der voll entwickelten Tonkonstellation, unterschiedliche Aspekte und inhärente Eigenschaften verdeutlicht werden: Im ersten Durchlauf erklingen lediglich die Anfangstöne der Motive. Es ergibt sich ein harmonisches Feld von Quintschichtungen, die sich vorhaltsähnlich in großen Sekunden abwärts bewegen. Durch Hinzufügen der 2. und 3. Töne der Motive im 2. Durchlauf wird diese Quintharmonik nun in eine Harmonik umgedeutet, in der viele große Septimen und Tritoni auftreten und die an die Harmonik von Anton Webern (1883-1945), einen Schüler Arnold Schönbergs, erinnert. Im dritten Durchlauf schließlich akzentuieren die 3 Instrumente die in der Gesamtstruktur latent vorhandenen chromatisch absteigenden Linien, so daß erneut eine Uminterpretation der Tonkonstellation erfolgt (Abb. 13, untere Hälfte). Auf Seite 14 ist die auskomponierte Fassung des Beginns des Stücks dargestellt, dem diese Harmonik zugrunde liegt.

Rekurs

für Altsaxophon, Schlagzeug, Klavier
und zwei Aufnahmegeräte

1

The image displays a musical score for the piece "Rekurs". It is arranged for Alto Saxophone (Sax.), Piano (Pno.), and Drums (Schl.). The score is divided into three systems, each starting with a rehearsal mark "56".

- System 1:** The Saxophone part begins with a melodic line marked *pp* and *mf*. The Piano part features a complex rhythmic accompaniment with *ppp* and *f* dynamics. The Drums part includes a pattern of eighth notes with *mf* and *f* dynamics.
- System 2:** The Saxophone part continues with a melodic line marked *pp* and *mf*. The Piano part features a complex rhythmic accompaniment with *ppp* and *f* dynamics. The Drums part includes a pattern of eighth notes with *mf* and *f* dynamics.
- System 3:** The Saxophone part continues with a melodic line marked *pp* and *mf*. The Piano part features a complex rhythmic accompaniment with *ppp* and *f* dynamics. The Drums part includes a pattern of eighth notes with *mf* and *f* dynamics.

The score includes various musical notations such as dynamics (*pp*, *mf*, *ppp*, *f*), articulation marks, and performance instructions like "Töne mit anderer Schwingung" and "Ped.".

Abbildung 14: Partitur des Beginns von "Rekurs"

4 Allgemeine Erörterungen

In unserer Gesellschaft herrscht die Auffassung vor, daß Musik und Mathematik kaum Gemeinsamkeiten aufweisen: Musik beschreibt in erster Linie Gefühle und Mathematik ist vor allem durch Rationalität und logisches Denken geprägt, also durch zwei Eigenschaften, die man in der Regel emotionaler Wahrnehmung gerade abspricht. Dies war im europäischen Raum aber nicht immer so. Die emotionalen Wirkungen der Musik wurden bis zum Beginn des 19. Jahrhunderts unter Fachleuten den mathematischen Eigenschaften der Verknüpfungen musikalischer Ereignisse zugesprochen, die aufgrund feststehender physikalischer Gesetze in uns wachgerufen werden. Erst die Musik der Romantik klammerte die Mathematik zumindest in der Selbstdarstellung der Komponisten weitgehend aus, da ihr Ziel, das schlechthin "Andere", sei es die positive Utopie gesellschaftlichen Zusammenlebens, sei es die im "poetischen Zustand" transzendente metaphysische Erfahrung, erlebbar zu machen, für sie jenseits rationaler Beschreibbarkeit lag. Am Rande erwähnt sei, daß dieser Hang um so stärker ausgeprägt war, je mehr sich sämtliche Künste im Zuge der zunehmenden Technisierung und Rationalisierung der Welt als autonome Bereiche ausdifferenzierten, und deren Hauptaufgabe darin gesehen wurde, der als Verlust empfundenen Säkularisierung durch die Wiedereinführung des "Wunderbaren" in die Alltagswelt, wie es beispielsweise in den Schriften E.T.A. Hoffmanns geschieht, entgegenzusteuern.

Dennoch gibt es – insbesondere für einen Komponisten – viele gute Gründe, sich mit den Zusammenhängen von Musik und Mathematik zu befassen. Zum Einen sind in den Naturwissenschaften einschliesslich der Mathematik in unserem Jahrhundert zunehmend nicht rational erklärbare Phänomene aufgetaucht, die häufig nur intuitiv erfassbar sind und die viel mit ästhetischer Erfahrung gemein haben. Und zum Anderen hat die Kompositionstechnik nicht erst seit der zunehmenden Verwendung von Computern rationale Aspekte, die auch das Bewußtsein des Komponisten beeinflussen. Nicht zuletzt wurden der Musik in unserem Jahrhundert durch Experimente mit Hilfe mathematischer Verfahren ungeahnte Möglichkeiten und Ausdrucksphären erschlossen.

Die beiden Themen, die in diesem Aufsatz eine besondere Rolle spielen, sind die Stochastik und rekursive Verfahrensweisen. Daher lassen Sie mich einen kurzen Überblick über die Gebiete und ihre Verwendung in der Kompositionstechnik des 20. Jahrhunderts geben.

Die Stochastik dient in den Naturwissenschaften der Untersuchung statistischer Phänomene anhand großer Datenmengen. Bezogen auf Ereignisse, beispielsweise das Auftreten einer bestimmten Zahl beim Würfelspiel oder beim Roulette, kann man zwar keine sicheren Aussagen über das Auftreten eines bestimmten Ereignisses in jedem Moment, jedoch mit – bezogen auf die Anzahl der untersuchten Ereignisse – zunehmender Genauigkeit Aussagen über die statistische Häufigkeit des Auftretens eines Ereignisses machen. Diese Eigenschaften machen sich nicht nur Spielbanken oder Lotteriegesellschaften, sondern auch Meinungsforschungsinstitute, Wirtschaftsforscher und Meteorologen (mit durchaus wechselndem Erfolg) zunutze.

In der Musik ist seit der Mitte des 20. Jahrhunderts besonders der Kompo-

nist Jannis Xenakis mit der systematischen Anwendung stochastischer Verfahren bekannt geworden. Wie bereits oben beschrieben, spielt dabei die Verwendung großer Datenmengen – im speziellen Fall von Xenakis sind dies natürlich musikalische Ereignisse – eine wichtige Rolle, so daß seine Werke schon allein durch die bis dahin unerhörte schiere Masse an akustischem Material, insbesondere in seinen Orchesterwerken, einen immensen Eindruck hinterließen. Eine ganz andere Zielsetzung verfolgte der Komponist John Cage, den an der Verwendung stochastischer Verfahren vor allem deren Unvorhersehbarkeit interessierte. Zufallsverfahren im kompositorischen Prozess verfolgen bei ihm das Ziel, Erwartungshaltungen beim Zuhörer auszuhebeln, um eine andere, offenere Rezeptionshaltung und Wahrnehmung zu ermöglichen.

Etwa zum gleichen Zeitpunkt, also in den 50er Jahren, spielte in der Musik – begünstigt durch eine starke naturwissenschaftliche Ausrichtung der kompositorischen Arbeit – die *Informationstheorie* eine wichtige Rolle. Musik, wie auch andere Künste, wurde mit Hilfe eines aus der Nachrichtentechnik entlehnten Kommunikationsmodells beschrieben: Zwischen einem Sender (dem Interpreten) und einem Empfänger (dem Rezipienten) wurde eine Nachricht (das Werk) als Übermittlung von Signalen und Zeichen aufgefaßt, die – ein gemeinsames Sprachsystem vorausgesetzt – Informationen repräsentieren. Der Informationsgrad oder die Informationsmenge einer Nachricht war dabei abhängig von der Vorhersehbarkeit der Signale, basierend auf dem Sprachsystem und den bereits vorher übermittelten Zeichen, die in ihren statistischen Eigenschaften die Erwartungshaltung des Empfängers repräsentieren. Je erwartbarer ein Zeichen, umso geringer sein Informationsgehalt und umgekehrt. Aus dieser Perspektive ist es zur Verwendung von Markov Ketten nur ein kleiner Schritt, sind sie ja *eine* der Möglichkeiten, einen Informationsfluß statistisch zu erfassen.

Dennoch hat die Verwendung von Markov Ketten in der Musik eine eher untergeordnete Rolle gespielt. Erst in den letzten Jahren zeigt sich wieder eine verstärkte Beschäftigung mit ihnen, vermutlich begünstigt durch die mittlerweile erheblich gestiegene Rechenleistung von Computern.

Rekursivität schließlich ist eine Beschreibungsform algorithmischer Vorgänge. Sie spielt in der Informatik eine wichtige Rolle und bildet den Kern eines Vorschlags zur Behandlung des sogenannten *Hilbertschen Entscheidungsproblems* vom Beginn dieses Jahrhunderts, den der amerikanische Mathematiker Alonzo Church (in Zusammenarbeit mit S.C. Kleene) entwickelte und der in den 50er Jahren den Ausgangspunkt für die Entwicklung der Programmiersprache Lisp bildete. Rekursivität taucht als Begriff in der musikwissenschaftlichen Literatur jedoch kaum auf, obwohl sich das Prinzip der Rekursivität sehr gut zur Beschreibung mancher Sachverhalte in der Musik, beispielsweise in Werken Johann Sebastian Bachs oder in Kompositionen der Renaissance, eignet. Auch Permutationsverfahren, die in der Musik unseres Jahrhunderts eine große Rolle spielten, lassen sich mit rekursiven Modellen besonders gut darstellen. Vor etwa 15 Jahren wurden rekursive Verfahren im Zusammenhang mit der Chaostheorie und der fraktalen Mathematik populär und wurden wiederholt vor allem in der Computermusik, aber auch in der Instrumentalmusik, beispielsweise vom Komponisten György Ligeti, eingesetzt.

So viel zum geschichtlichen Überblick über diese Techniken. Ich selbst verwende diese Modelle jedoch aus anderen Gründen. Zwar halte ich die Informationstheorie für sehr wichtig, insbesondere, da sie sich mit einem zentralen Phänomen, dem wir in steigendem Maße ausgesetzt sind, theoretisch zu nähern versucht: Der durch Massenmedien und Computer explosionsartig anwachsenden Verfügbarkeit von Information. Als Theorie greift sie jedoch, insbesondere im Hinblick auf künstlerische Prozesse, viel zu kurz. Einerseits, da die nachrichtentechnisch beschreibbare Übermittlung von Informationen nur einen geringen Teil des Vorgangs der Kunstrezeption ausmacht und die Informationstheorie den technisch kaum beschreibbaren Begriff der Intention völlig ausklammert. Den halte ich allerdings für entscheidend, da Kunst im emphatischen Sinne ohne die vom Rezipienten unterstellte Intention, worauf auch immer sie sich bezieht, nicht vorstellbar ist. Sie lebt häufig gerade vom Spiel mit dieser Situation, auch in denjenigen Werken, die Intentionalität bewußt zu vermeiden suchen (John Cage, der immer wieder versuchte, Kompositionsverfahren zu entwickeln, die weitmöglichst von subjektiver Intention befreit waren, sagte treffenderweise einmal sinngemäß: "I've got nothing to say, but I say it"). Und andererseits wirft der Umgang mit der Informationstheorie die Frage nach der gemeinsamen Sprache von Künstler und Rezipienten auf, ein aus meiner Sicht noch folgenreicheres Problem. Eine gemeinsame Sprache setzt einen überwiegend einheitlichen und allgemein verbindlichen Verwendungskodex von Zeichen und Bedeutungen voraus. Dieser ist aber in der Kunst unserer Zeit nicht auszumachen, und ich frage mich darüber hinaus, ob er heutzutage überhaupt wünschenswert sein kann.

Meine Verwendung dieser Verfahren zielt daher viel eher auf die Relationen von Ereignissen: Ich hoffe, daß die durch Systematiken gewonnenen Konstellationen von Strukturen aufgrund der ihnen innewohnenden Bezüge und aufgrund innerer Konsistenz sprachfähig werden, ohne daß wir uns über deren konkrete Bedeutungen im Einzelnen bewußt sein müssen. Insofern ist der Begriff der Konditionierung und – damit verbunden – der informationstheoretische Begriff der Redundanz, d.h. der strukturellen Wiederholung, von entscheidender Bedeutung. Systeme konditionieren die Wahrnehmung, indem bestimmte wiederkehrende Muster von unserem Rezeptionssystem abgespeichert werden. Diese können dabei durchaus von Werk zu Werk differieren. Meine Verwendung rekursiver Verfahren versucht, genau an einer solchen Stelle anzusetzen. Vor allem aufgrund ihrer strukturell manifesten und intuitiv erfassbaren Selbstbezüge erzeugen musikalische Abläufe eine Konsistenz, die ich durchaus sprachanalog deute. Im Verfahren einer Autopoiesis wird dadurch eine offene Kommunikation ermöglicht, die auf der Basis eines sich selbst erzeugenden Sinns erfahrbar wird. Worin dieser Sinn im Einzelnen liegt, vermag ich nicht allgemeinverbindlich zu sagen. Aber *daß* er existiert, daran versuche ich, keinen Zweifel zu lassen.